Dün yapılan en son yöntemi p, q, g sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \qquad (3.12)$$

dif. denklemine uygulayalım. Homojen kısmın

$$y_h = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

çözümünün bilindiğini düşünelim. c_1 ve c_2 sabitlerinin yerine $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ fonksiyonlarını koyalım. Buna göre

$$y = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

$$y' = u_1 y_1' + u_2 y_2' + u_1' y_1 + u_2' y_2$$

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \qquad (3.18)$$

$$y' = u_1 y_1' + u_2 y_2'$$

$$y'' = u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + u_1' y_1' + u_2' y_2'$$

(3.12) denkleminde y' ve y'' yerine yazılır ve düzenlenirse

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(t) \qquad (3.19)$$

elde edilir. (3.18) ve (3.19) şartlarını sağlayan u_1 ve u_2 fonksiyonları;

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$$

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(t)$$

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g(t) & y_2' \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)(t)} = -\frac{y_2(t)\, g(t)}{W(y_1,y_2)(t)}, \quad u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(t) \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)(t)} = \frac{y_1(t)\, g(t)}{W(y_1,y_2)(t)}$$

y_1, y_2 temel çözüm ve $W(y_1,y_2)(t) \neq 0$ olduğundan

$$u_1(t) = -\int \frac{y_2(t)\, g(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\, dt + c_1 \quad \text{ve} \quad u_2(t) = \int \frac{y_1(t)\, g(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\, dt + c_2$$

olarak bulunur.

Teorem: p, q, g fonksiyonları, I açık aralığında sürekli ve y_1, y_2

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \qquad (3.12)$$

dif. denklemin homojen kısmının lineer bağımsız çözümleri ise (3.12) denkleminin bir özel çözümü

$$Y(t) = -y_1(t)\int \frac{y_2(t)\, g(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\, dt + y_2(t)\int \frac{y_1(t)\, g(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\, dt$$

ve genel çözüm

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + Y(t)$$

olarak bulunur.

Örnek: 1) $y'' + 4y' + 4y = t^{-2} e^{-2t}$ $\quad t > 0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow (r+2)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -2$$

$$y_h = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}$$

dir.

$$y = u_1(t) e^{-2t} + u_2(t)\, t e^{-2t}$$

$$y' = -2u_1 e^{-2t} + (1-2t) u_2 e^{-2t} + u_1' e^{-2t} + u_2' t e^{-2t}$$

$$u_1' e^{-2t} + u_2' t e^{-2t} = 0$$

$$y' = -2u_1 e^{-2t} + (1-2t) u_2 e^{-2t}$$

$$y'' = 4u_1 e^{-2t} + u_2(-4+4t) e^{-2t} - 2u_1' e^{-2t} + u_2'(1-2t) e^{-2t}$$

denklemde yerine konursa

$$\left[4u_1 + u_2(-4+4t) - 2u_1' + u_2'(1-2t) - 8u_1 + 4(1-2t)u_2 + 4u_1 + 4u_2 t\right] e^{-2t} = t^{-2} e^{-2t}$$

$$-2u_1' e^{-2t} + u_2'(1-2t) e^{-2t} = t^{-2} e^{-2t}$$

$$u_1' e^{-2t} + u_2' t e^{-2t} = 0$$

$$u_1'(-2e^{-2t}) + u_2'(1-2t) e^{-2t} = t^{-2} e^{-2t}$$

$$u_1'(t)=\frac{\begin{vmatrix}0 & te^{-2t}\\ t^{-2}e^{-2t} & (1-2t)e^{-2t}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^{-2t} & te^{-2t}\\ -2e^{-2t} & (1-2t)e^{-2t}\end{vmatrix}}=\frac{-t^{-1}\,e^{-4t}}{e^{-4t}}=-\frac{1}{t}$$

$$u_2'(t)=\frac{\begin{vmatrix}e^{-2t} & 0\\ -2e^{-2t} & t^{-2}e^{-2t}\end{vmatrix}}{e^{-4t}}=\frac{t^{-2}e^{-4t}}{e^{-4t}}=\frac{1}{t^2}$$

$$u_1(t)=-\ln t+c_1\ ,\quad u_2(t)=-\frac{1}{t}+c_2$$

$$y=(-\ln t+c_1)e^{-2t}+\left(-\frac{1}{t}+c_2\right)te^{-2t}$$

$$y=k\,e^{-2t}+c_2te^{-2t}-\ln t\cdot e^{-2t}$$

(veya kısaca $y_1(t)=e^{-2t}$, $y_2(t)=te^{-2t}$, $g(t)=t^{-2}e^{-2t}$

$$W(y_1,y_2)(t)=\begin{vmatrix}e^{-2t} & te^{-2t}\\ -2e^{-2t} & (1-2t)e^{-2t}\end{vmatrix}=e^{-4t}$$

$$Y(t)=-e^{-2t}\int\frac{te^{-2t}\,t^{-2}e^{-2t}}{e^{-4t}}dt+te^{-2t}\int\frac{e^{-2t}\cdot t^{-2}e^{-2t}}{e^{-4t}}dt$$

$$=-e^{-2t}(\ln t)+te^{-2t}\left(-\frac{1}{t}\right)$$

$$y=c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}+\left(-e^{-2t}\ln t-e^{-2t}\right)$$

$$=k_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}-e^{-2t}\ln t\ \ )$$

2) Homojen kısmının çözümü $y_1(t)=t^2$ ve $y_2(t)=t^{-1}$ olan

$$t^2y''-2y=3t^2-1\qquad t>0$$

dif. denkleminin bir özel çözümünü bulunuz.

$$g(t)=\frac{3t^2-1}{t^2}=3-\frac{1}{t^2}$$

$$W(y_1,y_2)(t)=\begin{vmatrix}t^2 & t^{-1}\\ 2t & -t^{-2}\end{vmatrix}=-1-2=-3\neq 0$$

$$Y(t)=-t^2\int\frac{t^{-1}\cdot\left(3-\frac{1}{t^2}\right)}{-3}dt+t^{-1}\int\frac{t^2\left(3-\frac{1}{t^2}\right)}{-3}dt$$

$$=\frac{t^2}{3}\left(\int\left(\frac{3}{t}-t^{-3}\right)dt\right)-\frac{1}{3t}\int(3t^2-1)\,dt$$

$$=\frac{t^2}{3}\left(3\ln t+\frac{1}{2}t^{-2}\right)-\frac{1}{3t}\left(t^3-t\right)$$

$$=t^2\ln t+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}t^2+\frac{1}{3}$$

$$Y(t)=t^2\ln t+\frac{1}{2}$$